10-1 什么是物理？

正如我们已经讨论过的，物理学的一个重点是运动。 但是，到目前为止，我们仅检查了平移运动，在该平移运动中，对象沿直线或曲线移动，如图10-1a所示。 现在，我们转向旋转运动，其中对象绕轴旋转，如图10-1b所示。 您几乎可以在每台机器上看到旋转，每次打开带有拉环的饮料罐时都使用旋转，每次去游乐园时都要付费体验旋转。 旋转是许多有趣活动的关键，例如击打高尔夫中的长途击球（球需要旋转以使空气保持更长的时间）和投掷曲棍球到棒球中（例如，击球需要旋转）。 空气将其向左或向右推）。 旋转也是更严重问题的关键，例如老化飞机的金属故障。

就像我们在第2章中对平移所做的那样，我们通过定义运动变量来开始对旋转的讨论。我们将看到，旋转变量类似于一维运动的变量，如第2章所述， 重要的特殊情况是加速度（此处为旋转加速度）恒定。 我们还将看到可以为旋转运动编写牛顿第二定律，但我们必须使用一个称为扭矩的新量，而不只是力。 功和功-动能定理也可以应用于旋转运动，但是我们必须使用一个称为旋转惯量的新量，而不仅仅是质量。 简而言之，到目前为止，我们所讨论的大部分内容都可以通过一些变化而应用于旋转运动。

注意：尽管重复了物理思想，但许多学生还是觉得本章和下一章非常具有挑战性。 讲师为何会有多种原因，但其中有两个突出的原因：（1）有很多符号（带有希腊字母）需要整理。 （2）尽管您对线性运动非常熟悉（您可以穿过房间并在路上过得很好），但是您可能非常不熟悉旋转（这就是为什么您愿意为游乐园支付这么高的费用的原因之一） 游乐设施）。 如果对您来说家庭作业看起来像外语，请参阅将其转换为第二章的一维线性运动是否有帮助。 例如，如果要查找一个角度距离，则暂时删除angular一词，看看是否可以使用第2章的符号和想法解决该问题。

旋转变量 2021年3月26日10点50分

我们希望检查刚体绕固定轴的旋转。刚体是可以旋转而其所有零件都锁定在一起并且其形状没有任何变化的物体。固定轴是指围绕不动的轴进行旋转。因此，我们将不会检查太阳之类的物体，因为太阳的各个部分（一个气体球）没有锁定在一起。我们也不会检查像保龄球那样沿着车道滚动的物体，因为它绕着运动轴旋转（球的运动是旋转和平移的混合）。图10-2显示了围绕固定轴（称为旋转轴或旋转轴）旋转的任意形状的刚体。在纯旋转（角运动）中，身体的每个点都以一个圆心为中心在旋转轴上移动，并且每个点在特定的时间间隔内以相同的角度移动。在纯平移（线性运动）中，身体的每个点在一条直线上移动，并且每个点在特定的时间间隔内移动相同的线性距离。现在，我们一次处理一次线性量的角当量位置，位移，速度和加速度。

角位置

图10-2显示了一条固定在主体中的参考线，该参考线垂直于旋转轴并随主体旋转。 该线的角度位置是线相对于固定方向的角度，我们将其视为零角度位置。 在图10-3中，相对于x轴的正方向测量角位置θ。 从几何学上，我们知道θ是由

s是从x轴（零角度位置）延伸到参考线的圆弧的长度，r是圆的半径。

用这种方法定义的角度以弧度（rad）而非旋转数（rev）或度数为单位。 弧度是两个长度的比率，是一个纯数字，因此没有尺寸。 因为半径为r的圆的周长为2πr，所以一个完整的圆中有2π弧度：

在参考线绕旋转轴每次完整旋转时，我们不会将θ重置为零。 如果参考线从零角度位置完成了两次旋转，则该线的角度位置θ为θ=4πrad。 对于沿x轴的纯平移，如果知道x（t）（其随时间变化的位置），则我们可以知道所有有关移动物体的知识。 类似地，对于纯旋转，如果我们知道θ（t），即旋转物体的参考线随时间变化的角位置，就可以知道旋转物体的所有知识。

角位移

如果图10-3的主体绕图10-4中的旋转轴旋转，将参考线的角度位置从θ1更改为θ2，则该主体将经受下式给出的角位移Δθ

角位移的定义不仅适用于整个刚体，还适用于刚体内的每个粒子。 时钟是负的。 如果物体沿x轴进行平移运动，则其位移Δx可以是正值，也可以是负值，这取决于该物体是沿轴的正方向还是负方向移动。 类似地，根据以下规则，旋转体的角位移Δθ可以为正或为负：

逆时针方向的角位移为正，顺时针方向的角位移为负。

“时钟为负”一词可以帮助您记住这一规则（当清晨警报响起时，它们肯定是负的）。

角速度

假设我们的旋转体在时间t1处在角位置θ1处，在时间t2处在角位置θ2处，如图10-4所示。 我们定义从t1到t2的时间间隔Δt中物体的平均角速度为

其中Δθ是Δt期间的角位移（ω是小写欧米茄）。

我们将最关注的（瞬时）角速度ω是公式10-5中随着Δt接近零的比率的极限。 因此，

如果知道θ（t），则可以通过微分求出角速度ω。 公式10-5和10-6不仅适用于整个旋转刚体，而且适用于该刚体的每个粒子，因为这些粒子都被锁定在一起。 角速度的单位通常是每秒弧度（rad / s）或每秒转数（rev / s）。 至少在岩石的前三十年中，还使用了另一种角速度测量方法：音乐是由黑胶唱片（留声机）制作的，并在转盘上以“ 331 3 rpm”或“ 45 rpm”（即331 3转/分钟）播放 或45转/分钟.

如果粒子沿x轴平移运动，则其线速度v取决于其沿轴的方向，可以为正或为负。 类似地，旋转刚体的角速度ω可以为正，也可以为负，具体取决于刚体是逆时针旋转（正）还是顺时针旋转（负）。 （“时钟为负”仍然有效。）角速度的大小称为角速度，也用ω表示。

角加速度

如果旋转物体的角速度不是恒定的，则该物体具有角加速度。 令ω2和ω1分别为其在时间t2和t1的角速度。 将旋转体在t1到t2间隔内的平均角加速度定义为

其中Δω是在时间间隔Δt期间发生的角速度的变化。 当Δt接近零时，我们将最关注的（瞬时）角加速度α是该量的极限。 因此，

顾名思义，这是在给定瞬间身体的角加速度。 方程10-7和10-8也适用于该物体的每个粒子。 角加速度的单位通常为弧度/秒平方（rad / s2）或转数/秒平方（rev / s2）。

是角量向量吗？

我们可以通过矢量来描述单个粒子的位置，速度和加速度。 但是，如果将粒子限制在一条直线上，则我们实际上并不需要向量符号。 这样的粒子只有两个方向可用，我们可以用加号和减号指示这些方向。 同样，沿固定轴旋转的刚体只能沿该轴顺时针或逆时针旋转，并且我们可以再次通过加号和减号在两个方向之间进行选择。 随之而来的问题是：“我们可以将旋转物体的角位移，速度和加速度视为矢量吗？” 答案是合格的“是”（有关角位移，请参见以下注意事项）。

角速度。考虑角速度。图10-6a显示了在转盘上旋转的黑胶唱片。该记录在顺时针方向上具有恒定的角速度ω（= 331 3 rev / min）。我们可以将角速度表示为沿旋转轴指向的向量→ω，如图10-6b所示。方法如下：我们根据一些方便的比例来选择此矢量的长度，例如1厘米对应10转/分钟。然后，我们使用右手定则建立向量→ω的方向，如图10-6c所示：将右手卷曲在旋转记录上，手指指向旋转方向。然后，您伸出的拇指将指向角速度矢量的方向。如果记录以相反的方向旋转，则右手定律会告诉您，角速度矢量指向相反的方向。习惯于将角量表示为矢量并不容易。我们本能地期望某些东西应该沿着向量的方向移动。这里情况不同。取而代之的是，某些物体（刚体）围绕矢量的方向旋转。在纯旋转世界中，向量定义旋转轴，而不是事物移动的方向。尽管如此，矢量也定义了运动。此外，它遵守第3章中讨论的矢量操纵的所有规则。角加速度→α是另一个矢量，它也遵守这些规则。

角位移。现在请注意：角位移（除非它们很小）不能被视为矢量。为什么不？就像在图10-6中对角速度矢量所做的那样，我们当然可以给它们提供幅度和方向。但是，要表示为向量，数量也必须遵守向量加法规则，其中之一表示，如果添加两个向量，则添加顺序无关紧要。角位移未通过该测试。图10-7给出了一个示例。最初为水平书本提供两个90°角位移，首先按图10-7a的顺序，然后按图10-7b的顺序。尽管两个角位移是相同的，但它们的顺序不同，并且书的最终取向不同。这是另一个例子。保持右臂向下，手掌朝着大腿。保持手腕僵硬，（1）向前提起手臂直到其水平，（2）水平移动直到其指向右侧，（3）然后将其放到一边。您的手掌朝前。如果您从头开始，但将步骤相反，那么您的手掌最终会面向哪个方向？从任一示例中，我们必须得出结论，两个角位移的相加取决于它们的顺序，并且它们不能是矢量。

10-2 恒定角加速度旋转 2021年3月26日11点18分

在纯平移中，具有恒定线性加速度（例如，下落物体的线性加速度）的运动是一个重要的特殊情况。在表2-1中，我们显示了适用于此类运动的一系列方程式。在纯旋转中，恒定角加速度的情况也很重要，在这种情况下，一组平行的方程组也成立。我们不在这里推导它们，而只是从相应的线性方程式中写出它们，用等效角量代替线性方程式。这在表10-1中完成，该表列出了两组方程式（方程式2-11和2-15至2-18； 10-12至10-16）。回想一下，方程2-11和2-15是恒定线性加速度的基本方程式-线性列表中的其他方程式可以从它们得出。同样，公式10-12和10-13是恒定角加速度的基本公式，“角度”列表中的其他公式也可以从中得出。为了解决涉及恒定角加速度的简单问题，通常可以使用“角度”列表中的方程式（如果有列表）。选择一个方程，唯一的未知变量将是问题中请求的变量。更好的计划是仅记住方程式10-12和10-13，然后在需要时将它们作为联立方程式求解。

10-3 线性变量和角变量之间的关系 2021年3月26日11点29分

在模块4-5中，我们讨论了匀速圆周运动，其中粒子以恒定的线速度v沿一个圆并围绕旋转轴传播。当诸如旋转木马之类的刚体绕轴旋转时，体内的每个粒子都围绕该轴以自己的圆运动。由于物体是刚性的，因此所有粒子在相同的时间内旋转一圈。也就是说，它们都具有相同的角速度ω。但是，粒子离轴越远，其圆的圆周越大，因此其线速度v必须越快。您可以在旋转木马上注意到这一点。无论与中心的距离如何，都以相同的角速度ω转弯，但是如果移至旋转木马的外侧边缘，则线速度v会明显增加。我们经常需要将旋转物体中特定点的线性变量s，v和a与该物体的角度变量θ，ω和α相关联。两组变量之间的关系为r，即点到旋转轴的垂直距离。该垂直距离是点与旋转轴之间的距离，沿垂直于该轴的方向测量。它也是该点绕旋转轴行进的圆的半径r。

位置

如果刚体上的参考线旋转角度θ，则刚体中位于旋转轴位置r处的点沿圆弧移动距离s，其中s由公式10-1给出：

这是我们的线性角关系中的第一个。 注意：此处的角度θ必须以弧度为单位，因为公式10-17本身就是以弧度为单位的角度量度的定义。

速率

相对于时间微分方程10-17（r保持恒定）可得出

但是，ds / dt是所讨论的点的线速度（线速度的大小），dθ/ dt是旋转体的角速度ω。 所以

注意：角速度ω必须以弧度表示。 公式10-18告诉我们，由于刚体中的所有点都具有相同的角速度ω，因此半径r较大的点具有较大的线速度v。图10-9a提醒我们，线速度始终与切线的圆路径相切。 有问题的地方。 如果刚体的角速度ω恒定，则公式10-18告诉我们，其中任何点的线速度v也是恒定的。 因此，体内的每个点都经历均匀的圆周运动。 公式4-35给出了每个点的运动以及刚体本身的旋转周期T：

该方程式告诉我们，一转的时间就是一转的行进距离2πr除以该行进的速度。 代入公式10-18中的v并消除r，我们还发现

这个等式表示，一转的时间是一转中行进的角距离2πrad除以该角行进的角速度（或速率）。

加速度

相对于时间微分方程10-18（又使r保持恒定）会导致

在这里，我们遇到了一个复杂的问题。 在公式10-21中，dv / dt仅表示线性加速度中负责线速度→v大小v的变化的部分。 像→v一样，线性加速度的一部分与所讨论点的路径相切。 我们称其为点的线性加速度处的切向分量，并写为

其中α=dω/ dt。 注意：公式10-22中的角加速度α必须以弧度表示。 另外，如公式4-34所告诉我们的那样，沿圆形路径运动的粒子（或点）具有线性加速度的径向分量，ar = v2 / r（径向向内指向），负责沿方向的变化。 线速度→v。 通过用公式10-18替换v，我们可以将该分量写为

因此，如图10-9b所示，旋转的刚体上的一点的线性加速度通常具有两个分量。 每当物体的角速度不为零时，就会存在径向向内的分量ar（由公式10-23给出）。 每当角加速度不为零时，（由公式10-22给出）的切向分量都会存在。

10-4 旋转的动能 2021年3月26日13点47分

台式锯的快速旋转的刀片由于该旋转当然具有动能。 我们如何表达能量？ 我们无法将熟悉的公式K = 1 2 mv2应用于整个锯，因为这只会给我们锯的质心（零）提供动能。

相反，我们将台锯（和任何其他旋转的刚体）视为具有不同速度的粒子的集合。 然后，我们可以将所有粒子的动能相加，以求出整个身体的动能。 这样，我们获得了旋转体的动能，

其中mi是第i个粒子的质量，vi是其速度。 总和被吸收到体内的所有粒子上。 公式10-31的问题在于，对于所有粒子，vi都不相同。 我们通过用公式10-18（v =ωr）代替v来解决这个问题，这样我们就可以

其中所有粒子的ω都相同。 公式10-32右侧括号中的数量告诉我们旋转体的质量如何围绕其旋转轴分布。 我们称该量为物体相对于旋转轴的旋转惯量（或惯性矩）I。 对于特定的刚体和特定的旋转轴来说，它是一个常数。 （警告：如果要使I的值有意义，则必须始终指定该轴。）我们现在可以编写

作为我们寻求的表达方式。 因为我们在推导公式10-34中使用了关系v =ωr，所以ω必须以弧度表示。 I的SI单位是千克平方米（kg⋅m2）。

计划。如果我们有几个粒子并且有一个指定的旋转轴，则为每个粒子找到mr2，然后将其与公式10-33相加，得到总旋转惯量I。如果我们需要总旋转动能，则可以代入我将其转化为公式10-34。这是一些粒子的计划，但假设我们有大量粒子，例如棒状。在下一个模块中，我们将看到如何处理这样的连续物体，并在短短几分钟内完成计算。公式10-34（给出纯旋转时的刚体的动能）是公式K = 1 2 Mvcom 2的角当量，公式K = 1 2 Mvcom 2给出纯移动时的刚体的动能。在两个公式中，系数均为12。如果质量M出现在一个方程式中，则I（涉及质量及其分布）出现在另一个方程式中。最后，每个方程式都包含速度平方的因数-视情况平移或旋转。平移和旋转的动能不是不同种类的能量。它们都是动能，以适合于手头运动的方式表示。

前面我们已经指出，旋转体的旋转惯性不仅涉及其质量，而且还涉及质量的分布方式。 这是一个您可以真实感受到的示例。 旋转长而重的杆（一根杆，一段木材或类似的东西），首先绕其中心（纵向）轴线旋转（图10-11a），然后绕垂直于杆并穿过中心的轴线旋转（图10-11a）。 10-11b）。 两次旋转都涉及相同的质量，但是第一次旋转比第二次旋转容易得多。 原因是质量在第一次旋转中分布得更靠近旋转轴。 结果，杆的旋转惯量在图10-11a中比在图10-11b中小得多。 通常，较小的转动惯量意味着更容易转动。

10-5 计算旋转惯量 2021年3月26日14点07分

如果刚体由几个粒子组成，我们可以使用公式10-33（I = ∑miri 2）来计算其绕给定旋转轴的旋转惯量； 也就是说，我们可以找到每个粒子的乘积mr 2，然后对乘积求和。 （回想r是粒子到给定旋转轴的垂直距离。）如果刚体由很多相邻的粒子组成（它是连续的，就像飞盘一样），则使用公式10-33将需要一台计算机。 因此，取而代之的是，我们将等式10-33中的和替换为整数，并将物体的转动惯量定义为

表10-2给出了9种常见物体形状和所示旋转轴的积分结果。

平行轴定理

假设我们要找到质量物体M绕给定轴的转动惯量I。 原则上，我们总是可以通过公式10-35的积分找到I。 但是，如果我们碰巧已经知道了人体绕平行于人体重心的平行轴的旋转惯量Icom，则有一个捷径可走。 设h为给定轴与穿过质心的轴之间的垂直距离（请记住，这两个轴必须平行）。 那么绕给定轴的旋转惯量I为

将距离h看作是我们已经将旋转轴从通过com移开了的距离。 该方程式称为平行轴定理。 我们现在将证明这一点。

平行轴定理的证明

令O为图10-12中横截面所示的任意形状的物体的质心。 将坐标的原点放置在O处。考虑一个穿过O的轴，该轴垂直于该图的平面，另一个穿过P点的轴平行于第一根轴。 令P的x和y坐标为a和b。 令dm为具有一般坐标x和y的质量元素。 然后，根据公式10-35，物体绕P轴的旋转惯量为：

我们可以重新排列为

根据质心的定义（公式9-9），公式10-37的中间两个积分给出了质心的坐标（乘以一个常数），因此每个坐标必须为零。 因为x2 + y2等于R2，其中R是从O到dm的距离，所以第一个积分就是Icom，即物体绕通过其质心的轴的旋转惯量。 查看图10-12可以看到，公式10-37中的最后一项是Mh2，其中M是人体的总质量。 因此，公式10-37简化为公式10-36，这是我们要证明的关系。

10-6 扭矩 2021年3月26日14点38分

有充分的理由，门把手应尽可能远离门的铰链线。如果要打开一扇沉重的门，一定要用力，但这还不够。您在何处施加压力以及向哪个方向施加推力也很重要。如果您向旋钮铰链线以外的地方施加力，或者与门平面成90°以外的任何角度，则必须比在旋钮处且垂直于门平面的力施加更大的力。 。图10-16a示出了主体的横截面，该主体可以绕穿过O并垂直于该横截面的轴线自由旋转。在点P上施加了力→F，点P相对于O的位置由位置矢量→r定义。向量→F和→r的方向彼此成角度ϕ。 （为简单起见，我们仅考虑没有与旋转轴平行的分量的力；因此，→F在页面平面中。）要确定→F如何导致物体围绕旋转轴旋转，我们解析→F分为两个部分（图10-16b）。一个称为径向分量Fr的分量沿→r指向。该组件不会引起旋转，因为它沿着穿过O的直线起作用。（如果您拉动的门平行于门的平面，则不会旋转门。）→F的另一个组件，称为切向分量Ft垂直于→r，大小为Ft = F sin ϕ。该组件会引起旋转。

计算扭矩。 →F旋转物体的能力不仅取决于其切向分量Ft的大小，还取决于施加力距O的距离。 为了同时包含这两个因素，我们将称为扭矩τ的量定义为两个因素的乘积，并将其写为

计算扭矩的两种等效方法是

其中r⊥是旋转轴在O处和穿过向量→F的延长线之间的垂直距离（图10-16c）。 该延长线称为→F的作用线，而r⊥称为→F的力矩臂。 图10-16b显示，我们可以将r（→r的大小）描述为力分量Ft的力矩臂。

源自拉丁语意为“扭曲”的扭矩可以粗略地标识为→F力的旋转或扭曲作用。 当您向某个对象（例如螺丝起子或扭矩扳手）施加力而要转动该对象时，您就是在施加扭矩。 扭矩的SI单位是牛顿米（N·m）。 注意：牛顿计也是工作单位。 然而，扭矩和功是完全不同的量，切勿混淆。 功通常以焦耳（1 J = 1 N·m）表示，但扭矩从来没有。

时钟是负的。 在第11章中，我们将对转矩使用矢量符号，但是在这里，绕单轴旋转时，我们仅使用代数符号。 如果扭矩会导致逆时针旋转，则为正。 如果将导致顺时针旋转，则为负。 （模块10-1中的“时钟为负”仍然有效。）

扭矩遵循我们在第5章中讨论的力的叠加原理：当多个扭矩作用在物体上时，净扭矩（或合成扭矩）是各个扭矩的总和。 净转矩的符号为τnet。

10-7 用于旋转的牛顿第二定律 2021年3月26日14点47分

扭矩会导致刚体旋转，就像使用扭矩旋转门一样。 在这里，我们想将刚体上的净转矩τnet与转矩引起的绕旋转轴的角加速度α关联起来。 我们可以用牛顿第二定律（Fnet = ma）来模拟，该定律是由于沿坐标轴的净力Fnet引起的质量体m的加速度a。 在弧度测量中，我们将Fnet替换为τnet，将m替换为I，将a替换为α，

公式10-42的证明

我们首先考虑图10-17所示的简单情况，证明公式10-42。 那里的刚体在长度为r的无质量杆的一端由质量为m的颗粒组成。 杆只能绕垂直于页面平面的旋转轴（轴）绕其另一端旋转。 因此，粒子只能在以旋转轴为中心的圆形路径中移动。

→F的力作用在粒子上。 但是，由于粒子只能沿圆形路径移动，因此仅力的切向分量Ft（与圆形路径相切的分量）可以使粒子沿路径加速。 通过牛顿第二定律，我们可以将Ft与沿路径的粒子的切向加速度相关联，

根据公式10-40，作用在粒子上的扭矩为

从公式10-22（at =αr），我们可以写成

右边括号中的数量是粒子绕旋转轴的旋转惯量（请参见公式10-33，但此处我们只有一个粒子）。 因此，将I用作旋转惯量，公式10-43可简化为

如果对粒子施加了一个以上的力，则公式10-44变为

我们着手证明。 我们可以将此方程式扩展到绕固定轴旋转的任何刚体，因为任何这样的刚体始终可以作为单个粒子的集合进行分析。

10-8 工作和旋转动能 2021年3月26日14点54分

正如我们在第7章中讨论的那样，当力F导致质量为m的刚体沿坐标轴加速时，该力确实在该力上起作用。 因此，人体的动能（K = 1 2 mv2）可以改变。 假设它是人体唯一改变的能量。 然后，我们用功-动能定理（方程7-10）将动能的变化ΔK与功W关联起来，写为

对于限于x轴的运动，我们可以使用公式7-32计算功，

当F恒定且物体的位移为d时，该值减小为W = Fd。 完成工作的速度就是功率，可以通过公式7-43和7-48得出，

现在让我们考虑类似的轮换情况。 当扭矩使刚体绕固定轴旋转加速时，该扭矩确实在本体上起作用。 因此，人体的旋转动能（K = 1 2Iω2）可以改变。 假设它是人体唯一改变的能量。 然后，我们仍然可以用功-动能定理将动能的变化ΔK与功W关联起来，除了现在的动能是旋转动能：

在此，I是物体绕固定轴的旋转惯性，而ωi和ωf是在做功前后的角速度。

同样，我们可以用等式10-50的旋转当量来计算功，

其中τ是做功W的扭矩，θi和θf分别是做功前后的身体角度位置。 当τ恒定时，公式10-53简化为

完成工作的速度就是功率，我们可以通过公式10-51的旋转当量找到该功率，

表10-3总结了适用于刚体绕固定轴旋转的方程式以及用于平移运动的相应方程式。

证明方程10-52至10-55

让我们再次考虑图10-17的情况，其中力→F旋转由固定在无质量杆末端的质量为m的单个粒子组成的刚体。 在旋转过程中，力→F确实作用在身体上。 让我们假设由→F改变的人体唯一能量是动能。 然后，我们可以应用公式10-49的功-动能定理：

使用K = 1 2 mv2和公式10-18（v =ωr），我们可以将公式10-56重写为

根据公式10-33，此单粒子体的转动惯量为I = mr2。将其代入公式10-57，得出

这是公式10-52。 我们将其推导为具有一个粒子的刚体，但它适用于绕固定轴旋转的任何刚体。 接下来，我们将在图10-17中对身体所做的功W与由于力→F导致的身体上的扭矩τ关联起来。 当粒子沿其圆形路径移动距离ds时，仅力的切向分量Ft会使粒子沿路径加速。 因此，只有Ft对粒子起作用。 我们将该工作dW写为Ft ds。 但是，我们可以将ds替换为rdθ，其中dθ是粒子移动的角度。 因此，我们有

从公式10-40可以看到，乘积Ftr等于转矩τ，因此我们可以将公式10-58重写为